Dif. Denk II Final 31.05.2019

1) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 2e^{2x}$ 2) $y'' + 4y = 2\cos x$ $y(\pi)=0$, $y'(\pi)=0$

3) $y'' + 2y' + y = x^{-1}e^{-x}$ 4) $3x^2y'' + 4xy' - 2y = \ln x^3$

5) $2xy'' + (1-4x)y' + (2x-1)y = e^x$ denkleminin homogen kısmının bir özel çözümü $y_1 = e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

6) $y^2 = c^2x^2 + 1$ denkleminin varsa zarfını bulunuz

7) $(1-x)y'' - y' + y = 0$ denkleminin $y(0)=1$, $y'(0)=0$ şartını sağlayan seri çözümünü bulunuz. (Serinin en az ilk dört terimini yazınız)

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız. Başarılar N.A.

*) Bölümde görmüş olduğunuz matematik derslerinin hayattaki bakış açınıza olumlu veya olumsuz etkisinin olup-olmadığını açıklayınız.

ÇÖZÜMLERİ

1) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ genel çözümü

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$

$u(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3e^{-2x}$ olur.

$b(x) = 2e^{2x}$ old. dan bir özel çözüm $V(x) = Ae^{2x}$ şek. aranır $V' = 2Ae^{2x}$ $V'' = 4Ae^{2x}$ $V''' = 8Ae^{2x}$ ifadeler $y''' + 2y'' - y' - 2y = 2e^{2x}$ denk. yerine yazılırsa $A\cancel{e^{2x}}(8 + 2\cdot 4 - 2 - 2) = 2\cancel{e^{2x}} \Rightarrow A\cdot 12 = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$

$V(x) = \frac{1}{6}e^{2x}$ olur. Genel çözüm ise $y(x) = u(x) + V(x)$

$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{2x}$ olur

2) $y''+4y=2\cos x$, $y(\pi)=0$, $y'(\pi)=0$

$y''+4y=0 \Rightarrow \lambda^2+4=0 \quad \lambda^2=-4 \quad \lambda_{1,2}=\mp 2i$

$u(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ olur. Bir özel çözümü operatör yöntemi ile bulabiliriz.

$$V(x)=\frac{1}{D^2+4}2\cos x=\frac{1}{-1+4}\cdot 2\cos x=\frac{2}{3}\cos x \text{ olur.}$$

O halde genel çözüm $y(x)=u(x)+v(x)$ den

$$y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{2}{3}\cos x \text{ olur.}$$

$y(\pi)=0$ old. dan $x=\pi$, $y=0$ alınırsa

$$0=c_1\underbrace{\cos 2\pi}_{=1}+c_2\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}+\frac{2}{3}\underbrace{\cos\pi}_{-1} \Rightarrow 0=c_1-\frac{2}{3} \quad c_1=\frac{2}{3}$$

$y'(x)=-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x-\frac{2}{3}\sin x \quad y'(\pi)=0 \quad x=\pi, y'=0$

$$0=-2c_1\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}+2c_2\underbrace{\cos 2\pi}_{=1}-\frac{2}{3}\underbrace{\sin\pi}_{=0} \Rightarrow 0=2c_2 \Rightarrow c_2=0$$

Böylece istenen çözüm

$$y(x)=\frac{2}{3}\cos 2x+\frac{2}{3}\cos x \text{ olur.}$$

3) $y''+2y'+y=x^{-1}e^{-x} \quad y''+2y'+y=0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda+1=0$

$(\lambda+1)^2=0 \quad \lambda_1=-1 \quad u(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ olur. Operatör yönt. uyg.

$$V(x)=\frac{1}{D^2+2D+1}\frac{e^{-x}}{x}=\frac{1}{(D+1)^2}e^{-x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=e^{-x}\frac{1}{(D-1+1)^2}\frac{1}{x}=e^{-x}\frac{1}{D^2}\frac{1}{x}=e^{-x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}\frac{1}{x}\right)=e^{-x}\frac{1}{D}\ln x$$

$=e^{-x}(x\ln x-x)$ olur. O halde genel çözüm

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+e^{-x}(x\ln x-x)=c_1e^{-x}+\underbrace{c_2xe^{-x}-xe^{-x}}+xe^{-x}\ln x$$

$y(x)=c_1e^{-x}+c_3xe^{-x}+xe^{-x}\ln x$ olur. Veya sabitin değişimi yöntemiyle de çözülebilir.

3) $y''+2y'+y=x^{-1}e^{-x}$ $\quad u(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ dir.

sabitin değişimini uygularsak

$y(x)=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)xe^{-x}$ şek aranması için $c_1'(x)=?,\ c_2'(x)=?$

Bunun için $\left.\begin{array}{l} c_1'e^{-x}+c_2'xe^{-x}=0 \\ -c_1'e^{-x}+c_2'(e^{-x}-xe^{-x})=\dfrac{e^{-x}}{x}\end{array}\right\}$ olur. Düzenle

nirse $\left.\begin{array}{l} c_1'+c_2'x=0 \\ -c_1'+c_2'(1-x)=\dfrac{1}{x}\end{array}\right\}$ olur. Taraf tarafa toplanırsa

$c_2'(x+1-x)=\frac{1}{x} \Rightarrow c_2'=\frac{1}{x}$ $\quad c_2(x)=\ln x+c_2$ bulur.

$c_1'=-c_2'x \Rightarrow c_1'=-\frac{1}{x}\cdot x \Rightarrow c_1'=-1 \Rightarrow c_1(x)=-x+c_1$ olur.

O halde genel çözüm

$$y(x)=(-x+c_1)e^{-x}+(\ln x+c_2)xe^{-x}$$

$y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-xe^{-x}+xe^{-x}\ln x \Rightarrow y(x)=c_1e^{-x}+c_3xe^{-x}+xe^{-x}\ln x$

olur.

---

4) $3x^2y''+4xy'-2y=\ln x^3$ Cauchy Euler dir $x=e^t,\ t=\ln x$

dönüşümü uyg. denklem sabit katsayılı denkleme dönüşür.

$(3x^2D^2+4xD-2)y=3\ln x$ $\quad xDy=D_ty$ $\quad x^2D^2y=D_t(D_t-1)y$ olur.

$(3D_t(D_t-1)+4D_t-2)y=3t$ $\quad (3D_t^2+D_t-2)y=3t$ olur

$(3D_t^2+D_t-2)y=0 \Rightarrow 3\lambda^2+\lambda-2=0$ $\quad (3\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$\lambda_1=\frac{2}{3}$ $\lambda_2=-1 \Rightarrow u(t)=c_1e^{\frac{2}{3}t}+c_2e^{-t}$ olur. $b(t)=3t$ old.

$V(t)=At+B$ şek aranır. $V'=A$ $\quad V''=0 \Rightarrow 3y''+y'-2y=3t$ de yerine

yazılırsa $3.0+A-2(At+B)=3t \Rightarrow -2At+A-B=3t \Rightarrow -2A=3 \Rightarrow A=-\frac{3}{2}$

$A-B=0 \Rightarrow B=-3/2$ olur. $V(t)=-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$ olur $y(t)=u(t)+V(t)$

$y(t)=c_1e^{2/3t}+c_2e^{-t}-\frac{3}{2}(t+1) \Rightarrow t=\ln x$ yazılırsa $y(x)=c_1x^{\frac{2}{3}}+c_2x^{-1}-\frac{3}{2}(\ln x+1)$

olur.

7) $(1-x)y'' - y' + y = 0 \quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

$x=0$ denklem için bir adi noktamıdır?

$y'' - \frac{1}{1-x} y' + \frac{1}{1-x} y = 0$ olur.

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$, $-1<x<1$ olduğundan ve

$x=0$ bu aralıkta olduğundan bir adi noktadır.

Bu nokta komşuluğunda denklemin

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

şeklinde seri çözümü vardır. Şimdi a_0, a_1, a_2, a_3 sabitlerini bulalım

$y(0) = a_0 \quad y'(0) = a_1 \quad y''(0) = 2a_2 \quad y'''(0) = 6a_3$ olur

$y(0)=1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$ $y'(0)=0,\ \boxed{a_1 = 0}$ olur. Bunları denklemde yerine yazılırsa

$(1-0)\,y''(0) - y'(0) + y(0) = 0 \Rightarrow y''(0) - 0 + 1 = 0$

$y''(0) = -1 \Rightarrow 2a_2 = -1 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$ olur. Denklemin bir kez daha türevini alırsak

$-y'' + (1-x)y''' - y'' + y' = 0 \Rightarrow -2y''(0) + (1-0)y'''(0) + y'(0) = 0$

$(-2)(-1) + y'''(0) + 0 = 0 \Rightarrow y'''(0) = -2 \Rightarrow 6a_3 = -2 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3}$

O halde çözüm

$y(x) = 1 + 0.x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots$ olur.

5) $2xy''+(1-4x)y'+(2x-1)y=e^x$ Mertebe düşürme ile çözersek $y=u.e^x$, $y'=u'e^x+ue^x$

$y''=u''e^x+2u'e^x+ue^x$ olur. Denklemde yerine yazılırsa

$2x(u''+2u'+u)\cancel{e^x}+(1-4x)(u'+u)\cancel{e^x}+(2x-1)u\cancel{e^x}=\cancel{e^x}$ olur.

Düzenlenirse

$2xu''+u'=1 \Rightarrow u'=v$, $u''=v'$ olur. Denklem

$2xv'+v=1 \Rightarrow v'+\frac{1}{2x}v=\frac{1}{2x}$ $\lambda(x)=e^{\int\frac{1}{2x}dx}=e^{\frac{1}{2}\ln x}=\sqrt{x}$

$\sqrt{x}.v=\int\sqrt{x}.\frac{1}{2x}dx+c_1$ $\sqrt{x}.u'=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+c_1$

$\sqrt{x}u'=\sqrt{x}+c_1 \Rightarrow u'=1+\frac{c_1}{\sqrt{x}} \Rightarrow u=\int\left(1+\frac{c_1}{\sqrt{x}}\right)dx+c_2$

$u=x+2c_1\sqrt{x}+c_2$ olur Böylece genel çözüm

$y=ue^x \Rightarrow y=(x+2c_1\sqrt{x}+c_2)e^x=2c_1\sqrt{x}e^x+c_2e^x+xe^x$

olur.

6) $y^2=c^2x^2+1$ c ye göre kısmi türev alınırsa

$0=2cx^2 \Rightarrow c=0$ olur Yerine yazılırsa $y^2=1$ tekil yerleri bulunur. Tekil çözüm mü?

$\left.\begin{array}{l} y^2=c^2x^2+1 \\ 2yy'=2c^2x \end{array}\right\} \rightarrow$ x'e göre türev alınırsa $c^2=\frac{yy'}{x} \Rightarrow y^2=c^2x^2+1$ de yerine

yazılırsa dif denk $y^2=\frac{yy'}{x}.x^2+1$ şeklinde bulunmuş

olur $y^2=1 \Rightarrow 2yy'=0$ olur. Denklemde yerine yazılırsa

$1=\frac{0}{x}.x^2+1 \Rightarrow 1=1$ old yani denk sağladığından

tekil çözümdür. Zarf mıdır? $y^2=1$ tekil çözümü

$y^2=c^2x^2+1$ de yerine yazılırsa $1=c^2x^2+1 \Rightarrow c^2x^2=0$

Burada c ikinci derecede katlı kök old.dan zarftır.